

§2 第 2 课时 空间向量的数量积

【学习目标】

- 1.了解空间向量的夹角.
- 2.掌握空间向量的数量积的定义、性质、运算律及计算方法.
- 3.了解投影向量以及投影数量的概念.
- 4.掌握两个向量的数量积在判断垂直中的应用，掌握利用向量数量积求空间两点间的距离.

【重点难点】

重点：了解空间向量的夹角；掌握空间向量的数量积的定义、性质、运算律及计算方法.

难点：了解投影向量以及投影数量的概念；掌握两个向量的数量积在判断垂直中的应用，掌握利用向量数量积求空间两点间的距离.

【导学流程】

一、复习导入

在平面向量中已经学过两个平面向量的数量积运算，由于任意两个空间向量都可以通过平移转化为同一平面内的向量，因此，两个空间向量的夹角和数量积就可以像平面向量那样来定义.

二、探究新知

◇探究一 空间向量的夹角及数量积

【知识梳理】

1. 两个向量的夹角

定义	已知两个非零向量 a, b ，在空间任取一点 O ，作 $\vec{OA}=a, \vec{OB}=b$ ，则 $\angle AOB$ 叫作向量 a 与 b 的夹角，记作_____
范围	$0 \leq \langle a, b \rangle \leq \pi$
向量垂直	当 $\langle a, b \rangle = \frac{\pi}{2}$ 时，称向量 a, b 互相垂直，记作_____
向量平行	规定：零向量与任意向量垂直
	当 $\langle a, b \rangle = 0$ 时，向量 a 与 b 方向_____；当 $\langle a, b \rangle = \pi$ 时，向量 a 与 b 方向_____

◇探究二 两个向量的数量积

(1)空间向量的数量积

已知两个空间向量 a, b ，把 $|a||b|\cos \langle a, b \rangle$ 叫作 a 与 b 的数量积，记作 $a \cdot b$ ，即 $a \cdot b = |a||b|\cos \langle a, b \rangle$. 零向量与任意向量的数量积为 0，即 $0 \cdot a = 0$.

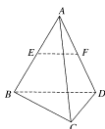
① $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$ ($a \neq 0, b \neq 0$);

② $|a| = \sqrt{a \cdot a}$; ③ $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$.

(2)运算律

数乘向量与数量积的结合律	$(\lambda a) \cdot b = \underline{\hspace{2cm}}, \lambda \in \mathbf{R}$
交换律	$a \cdot b = \underline{\hspace{2cm}}$
分配律	$a \cdot (b + c) = \underline{\hspace{2cm}}$

例1 如图所示, 已知空间四边形 $ABCD$ 的每条边和对角线长都等于 1, 点 E, F 分别是 AB, AD 的中点, 计算:



(1) $\vec{EF} \cdot \vec{BA}$; (2) $\vec{EF} \cdot \vec{BD}$; (3) $\vec{EF} \cdot \vec{DC}$; (4) $\vec{BF} \cdot \vec{CE}$.

跟踪训练1 (1)(多选) 设 a, b 为空间中的任意两个非零向量, 下列各式中正确的有()

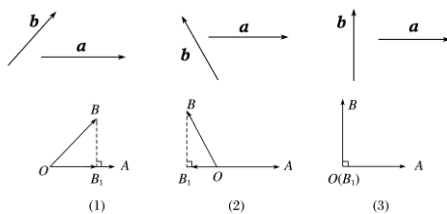
A. $a^2 = |a|^2$ B. $\frac{a \cdot b}{a^2} = \frac{b}{a}$ C. $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ D. $(a - b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2$

(2) 空间向量 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$, $|a| = 3, |b| = 1, |c| = 4$, 则 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$ 的值为_____.

◇探究三 投影向量与投影数量

【知识梳理】

已知两个非零向量 a, b , 在空间任取一点 O , 作 $\vec{OA} = a, \vec{OB} = b$, 过点 B 作直线 OA 的垂线, 垂足为点 B_1 , 称向量 $\vec{OB_1}$ 为向量 b 在向量 a 方向上的投影向量, 其长度等于_____, 当 $\langle a, b \rangle$ 为锐角时, $|b|\cos \langle a, b \rangle > 0$ (如图(1)); 当 $\langle a, b \rangle$ 为钝角时, $|b|\cos \langle a, b \rangle < 0$ (如图(2)); 当 $\langle a, b \rangle = \frac{\pi}{2}$ 时, $|b|\cos \langle a, b \rangle = 0$ (如图(3)).



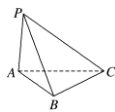
若用 a_0 表示与向量 $a(a \neq 0)$ 同方向的单位向量, 则向量 b 在向量 a 方向上的投影向量为 $\vec{OB_1} = \underline{\hspace{2cm}}$. 因此, 称 $|b|\cos \langle a, b \rangle$ 为投影向量 $\vec{OB_1}$ 的数量, 简称为向量 b 在向量 a 方向上的投影数量. 向量 b 在向量 a 方向上的投影数量为 $\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

注意点:

(1) 投影数量可正、可负、也可为零, 这是由两非零向量的夹角决定的.

(2) 投影数量不一定是投影向量的模. 当两向量的夹角小于或等于 90° 时, 投影数量才是投影向量的模.

例2 (1)如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , 平面 $PAB \perp$ 平面 PBC , $BC \perp PB$; $PA=2$, $PB=2\sqrt{2}$, 若 \vec{AB} 方向的单位向量为 \mathbf{e} , 则 \vec{CP} 在向量 \vec{AB} 方向上的投影向量为_____.



(2)已知向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 60° , $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=6$, 则 $2\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 在 \mathbf{a} 方向上的投影数量为_____.

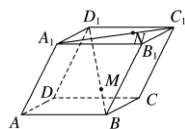
反思感悟 \mathbf{a} 在 \mathbf{b} 方向上的投影数量为 $|\mathbf{a}|\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$.

跟踪训练2 (1)已知 $|\mathbf{b}|=3$, \mathbf{a} 在 \mathbf{b} 方向上的投影数量为 $\frac{3}{2}$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ _____.

(2)已知 $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=5$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -12$ 且 \mathbf{e} 是与 \mathbf{b} 方向相同的单位向量, 则 \mathbf{a} 在 \mathbf{b} 上的投影向量为_____.

◇探究四 空间向量数量积的运算

例3 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AD=AA_1=AB=1$, $\angle A_1AB = \angle DAB = \angle DAA_1 = 60^\circ$, $\vec{A_1C_1} = 3\vec{NC_1}$, $\vec{D_1B} = 4\vec{MB}$, 设 $\vec{AB} = \mathbf{a}$, $\vec{AD} = \mathbf{b}$, $\vec{AA_1} = \mathbf{c}$.



(1)试用 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} 表示 \vec{MN} ;

(2)求 MN 的长度.

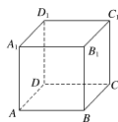
跟踪训练3 (1)已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为1, 设 $\vec{AB} = \mathbf{a}$, $\vec{AD} = \mathbf{b}$, $\vec{AA'} = \mathbf{c}$, 则 $\langle \vec{A'B}, \vec{B'D'} \rangle$ 等于()

A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°

(2)已知在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=AB=AD=1$, 且这三条棱彼此之间的夹角都是 60° , 则 AC_1 的长为_____.

三、随堂演练

1. (多选)如图所示, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 下列各组向量的夹角为 45° 的是()



A. \vec{AB} 与 $\vec{A_1C_1}$

B. \vec{AB} 与 $\vec{C_1A_1}$

C. \vec{BC} 与 $\vec{C_1B}$

D. \vec{BC} 与 $\vec{AD_1}$

2. 已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为2, 则向量 \vec{AB} 在向量 \vec{CA} 方向上的投影向量为()

A. $-\frac{1}{2}\vec{CA}$

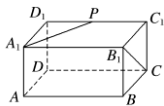
B. $\frac{1}{2}\vec{CA}$

C. $2\vec{AC}$

D. $2\vec{CA}$

3. 若 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为空间夹角是 60° 的两个单位向量, 则 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=$ _____.

4. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 设 $AD=AA_1=1, AB=2$, P 是 C_1D_1 的中点, 则 $\vec{B_1C}$ 与 $\vec{A_1P}$ 所成角的大小为_____, $\vec{B_1C} \cdot \vec{A_1P}=$ _____.



四、课堂小结

1. 知识清单: (1)空间向量的夹角、投影向量和投影数量. (2)空间向量数量积、性质及运算.

2. 方法归纳: 化归转化. 3. 常见误区: 数量积的符号由夹角的余弦值决定.

五、布置作业(课时对点练)

基础巩固

1. 已知向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的夹角为 120° , 且 $|\mathbf{a}|=2, |\mathbf{b}|=5$, 则 $(2\mathbf{a}-\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$ 等于()

- A. 12 B. $8+\sqrt{13}$ C. 4 D. 13

2. (多选)若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是空间任意三个向量, $\lambda \in \mathbf{R}$, 则下列关系中, 不成立的是()

- A. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{b}-\mathbf{a}|$ B. $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}=\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}+\mathbf{c})$ C. $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$ D. $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$

3. 若向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}|=2, (\mathbf{a}+2\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}=6$, 则 \mathbf{b} 在 \mathbf{a} 方向上的投影数量为()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -1

4. 已知 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是夹角为 60° 的两个单位向量, 则 $\mathbf{a}=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$ 与 $\mathbf{b}=\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2$ 的夹角是()

- A. 60° B. 120° C. 30° D. 90°

5. 平行六面体(底面为平行四边形的四棱柱) $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都为 1, 且 $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 60^\circ, \angle DAB = 45^\circ$, 则 BD_1 等于()

- A. $\sqrt{3}-1$ B. $\sqrt{2}-1$ C. $\sqrt{3-\sqrt{2}}$ D. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

6. (多选)在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 下列命题是真命题的是()

- A. $(\vec{AA_1}+\vec{AD}+\vec{AB})^2=3\vec{AB}^2$ B. $\vec{A_1C} \cdot (\vec{A_1B_1}-\vec{A_1A})=0$
C. $\vec{AD_1}$ 与 $\vec{A_1B}$ 的夹角为 60° D. 正方体的体积为 $|\vec{AB} \cdot \vec{AA_1} \cdot \vec{AD}|$

7. 已知 $|\mathbf{a}|=13, |\mathbf{b}|=19, |\mathbf{a}+\mathbf{b}|=24$, 则 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=$ _____.

8. 已知向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的夹角为 45° , 且 $|\mathbf{a}|=4, \left(\frac{1}{2}\mathbf{a}+\mathbf{b}\right) \cdot (2\mathbf{a}-3\mathbf{b})=12$, 则 $|\mathbf{b}|=$ _____; \mathbf{b} 在 \mathbf{a} 上的投影向量的模等于_____.

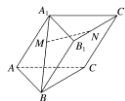
9. 已知在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AA_1=2, AD=4$, E 为侧面 AB_1 的中心, F 为 A_1D_1 的中点, 试计算:

(1) $\vec{BC} \cdot \vec{ED}_1$;

(2) $\vec{BF} \cdot \vec{AB}_1$;

(3) $\vec{EF} \cdot \vec{FC}_1$.

10. 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, M, N 分别是 A_1B, B_1C_1 上的点, 且 $BM=2A_1M, C_1N=2B_1N$. 设 $\vec{AB}=\mathbf{a}, \vec{AC}=\mathbf{b}, \vec{AA_1}=\mathbf{c}$.



(1) 试用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示向量 \vec{MN} ;

(2) 若 $\angle BAC=90^\circ, \angle BAA_1=\angle CAA_1=60^\circ, AB=AC=AA_1=1$, 求 MN 的长.

综合运用

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AB}^2 = 0$, 则 \vec{BC} 在 \vec{BA} 方向上的投影向量为()

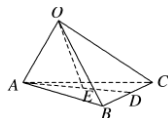
A. \vec{BA}

B. $\frac{1}{2}\vec{AB}$

C. \vec{AC}

D. $\frac{1}{2}\vec{CA}$

12. 如图正四面体 $OABC$ 的棱长为 1, D 为 BC 的中点, E 为 AD 的中点, 则 OE 的长度为()



A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{11}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

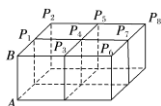
D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

13. 在四面体 $OABC$ 中, 棱 OA, OB, OC 两两垂直, 且 $OA=1, OB=2, OC=3, G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心, 则 $\vec{OG} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) =$ _____.

14. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 若动点 P 在线段 BD_1 上运动, 则 $\vec{DC} \cdot \vec{AP}$ 的取值范围是_____.

拓广探究

15. 如图所示, 四个棱长为 1 的正方体排成一个正四棱柱, AB 是一条侧棱, $P_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 是上底面上其余的八个点, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{AP_i} (i=1, 2, \dots, 8)$ 的不同值的个数为()



A. 8

B. 4

C. 2

D. 1

16. 如图所示, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=AC=1, \angle ACD=90^\circ$, 沿着它的对角线 AC 将 $\triangle ACD$ 折起, 使 AB 与 CD 成 60° 角, 求此时 B, D 两点间的距离.

